

Artigo 02:

Porque o Black & Scholes
funciona...

**... até deixar de
funcionar.**

Artigo 2: Porque o Black & Scholes funciona... até deixar de funcionar.

Por Raphael Shiratori

KTH – Tecnologia para gestão de portfólio, risco e compliance

Conteúdo produzido no contexto das pesquisas e experiências práticas da KTH no desenvolvimento de soluções para mercados financeiros.

Introdução

No nosso primeiro artigo da série falamos de forma superficial sobre a volatilidade implícita, como ela se conecta com o mundo dos investimentos e sobre as diferentes maneiras de olhar a volatilidade. Nesse artigo iremos aprofundar como a teoria proposta inicialmente se afasta da realidade. O modelo Black & Scholes (B&S), desenvolvido no início dos anos 1970, revolucionou o mercado financeiro ao fornecer uma fórmula fechada para a precificação de opções. Sua simplicidade e elegância matemática o tornaram um dos pilares da teoria financeira moderna, sendo amplamente adotado por *traders*, gestores de risco e acadêmicos. Apesar de sua importância histórica e da popularidade consolidada, o modelo baseia-se em hipóteses simplificadoras que nem sempre refletem a complexidade do mercado real. O objetivo deste artigo é examinar essas hipóteses fundamentais, identificar suas limitações e discutir as implicações práticas para a utilização do modelo no contexto dinâmico dos mercados financeiros. Ao longo deste artigo, mostraremos como os próprios preços das opções fornecem evidências claras dessas limitações, revelando padrões de risco e incerteza que não podem ser explicados pela estrutura clássica do Black & Scholes.

1. Os detalhes da teoria por trás de Black & Scholes: Movimento geométrico browniano.

Para compreender a origem da fórmula fechada de Black & Scholes, é essencial ter um entendimento básico de cálculo estocástico. O preço de um ativo é definido como uma variável aleatória, caracterizada por um movimento browniano geométrico. A fórmula que descreve isso é:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Fórmula 1: Movimento Geométrico Browniano

Onde:

S_t representa o preço do ativo em um determinado instante,

dS_t representa o diferencial do preço do ativo em um determinado instante,

μ é o drift (uma constante),

dt é a variação do tempo,

σ é a volatilidade (também constante), e

dW_t é o processo de Wiener (ou movimento browniano geométrico).

Com base nesse processo estocástico teórico, foi derivada a solução para a precificação de uma opção, que é essencialmente o valor esperado da opção no vencimento, trazido a valor presente. Em outras palavras, considerando todo o conjunto de possíveis trajetórias que o ativo pode seguir, ponderadas pela probabilidade de ocorrência, calculamos o valor esperado, que é basicamente uma integral de todos os caminhos possíveis. Como os incrementos do processo de Wiener seguem uma distribuição normal, o modelo implica que os retornos logarítmicos do ativo também são normalmente distribuídos.

2. Hipóteses básicas do modelo Black & Scholes

A elegância e a simplicidade do modelo de Black & Scholes decorrem diretamente de um conjunto de hipóteses que tornam o problema matematicamente tratável. Essas hipóteses não são, em si, “erros”: elas representam abstrações necessárias para que seja possível obter uma fórmula fechada para a precificação de opções. No entanto, ao confrontá-las com o comportamento observado dos mercados financeiros, torna-se evidente que muitas dessas suposições se afastam da realidade. A seguir, discutimos as principais hipóteses do modelo e suas implicações econômicas.

2.1 Volatilidade constante

O modelo de Black & Scholes assume que a volatilidade do ativo subjacente é constante ao longo de toda a vida da opção. Em outras palavras, a incerteza associada à evolução do preço é tratada como um parâmetro fixo, conhecido e imutável no tempo.

Essa suposição é crucial para a derivação da fórmula fechada, pois permite que a dinâmica do preço seja descrita de forma simples e contínua. Do ponto de vista econômico, assumir volatilidade constante implica acreditar que o ambiente de risco do mercado não se altera, independentemente de choques, mudanças de regime, divulgação de informações relevantes ou variações no sentimento dos investidores.

Na prática, essa hipótese ignora o fato de que a volatilidade é um reflexo direto da incerteza e das expectativas do mercado, variáveis que estão em constante transformação. Essa hipótese, embora conveniente do ponto de vista matemático, entra em conflito direto com a forma como o risco é percebido e precificado pelos participantes do mercado.

2.2 Caminho lognormal sem saltos (difusão contínua)

Outra hipótese fundamental do modelo é que o preço do ativo segue um movimento browniano geométrico, o que implica trajetórias contínuas e suaves ao longo do tempo. Nesse arcabouço, o preço pode se mover rapidamente, mas nunca de forma descontínua: não existem saltos instantâneos.

Essa suposição exclui explicitamente a possibilidade de eventos abruptos, como anúncios inesperados, falhas operacionais, crises financeiras ou choques macroeconômicos, que frequentemente provocam variações bruscas nos preços dos ativos. Do ponto de vista matemático, a ausência de saltos é essencial para a construção de estratégias de hedge dinâmico contínuo, um dos pilares conceituais do modelo.

Empiricamente, os mercados financeiros estão repletos de descontinuidades. Gaps de abertura, movimentos overnight e interrupções de negociação são evidências claras de que o processo de difusão contínua não captura completamente a dinâmica real dos preços.

2.3 Juros constantes e ausência de fricções

O modelo de Black & Scholes também assume a existência de uma taxa de juros livre de risco constante ao longo do tempo, além de desconsiderar custos de transação, impostos, restrições operacionais e impactos de liquidez.

Essas hipóteses simplificam significativamente a análise e permitem a construção teórica de portfólios perfeitamente replicáveis. Contudo, elas pressupõem um mercado idealizado, no qual todos os agentes conseguem negociar continuamente, sem custos e sem limitações.

Na realidade, taxas de juros variam ao longo do tempo, custos de transação afetam decisões de hedge e restrições de liquidez podem se tornar críticas, especialmente em períodos de estresse. Embora essas fricções não sejam o foco central da crítica ao modelo, elas contribuem para o afastamento entre a teoria e a prática.

2.4 Ausência de assimetria e caudas gordas

Por fim, o modelo assume que os retornos do ativo subjacente seguem uma distribuição normal, o que implica simetria em torno da média e baixa probabilidade de eventos extremos. Essa característica está diretamente associada à hipótese de volatilidade constante e à difusão contínua do processo de preços.

Entretanto, evidências empíricas mostram que retornos financeiros apresentam assimetrias significativas e distribuições com caudas mais pesadas do que a normal. Eventos extremos, embora raros, ocorrem com frequência muito maior do que a prevista pelo modelo, especialmente em mercados acionários.

Essa discrepância tem implicações profundas para a precificação de opções, uma vez que instrumentos fora do dinheiro são altamente sensíveis à probabilidade atribuída a movimentos extremos. Como veremos na próxima seção, os próprios preços das opções incorporam essa assimetria de forma explícita,

revelando expectativas de risco que não podem ser explicadas pelo arcabouço clássico do Black & Scholes.

Essas hipóteses, quando analisadas isoladamente, podem parecer razoáveis como aproximações de primeira ordem. No entanto, ao serem combinadas, elas impõem uma visão excessivamente simplificada do comportamento do mercado. A próxima seção confronta diretamente essas suposições com a evidência empírica, utilizando os preços das opções e o uso invertido da fórmula de Black & Scholes como um instrumento para revelar como o mercado realmente precifica risco e incerteza.

3. O mercado nos diz explicitamente que as hipóteses do Black & Scholes são falsas: basta ouvir o que os preços das opções estão dizendo

3.1. O uso invertido do Black & Scholes como ferramenta de diagnóstico

O modelo de Black & Scholes propõe calcular o preço de uma opção dado que conhecemos a volatilidade do ativo subjacente. Observando o comportamento do mercado percebemos que a fórmula é utilizada de forma inversa: dado o preço das opções, calculamos a volatilidade implícita que a fórmula de Black & Scholes nos indica. Isso por si só já nos diz muito sobre a natureza da fórmula, basicamente conectando o preço das opções ao processo estocástico que rege o ativo subjacente. E como temos uma volatilidade implícita para cada par de valores de prazo e strike, é possível montar um mapa de como essa ligação acontece em cada umas dessas dimensões.

A volatilidade que, pela hipótese do modelo de Black & Scholes, é um único parâmetro escalar, passa empiricamente a atuar como uma grande matriz que mapeia a volatilidade por strike e vencimento. Em outras palavras, a volatilidade empírica é uma função bidimensional de strike e tempo, ou uma superfície, que representa como o mercado espera que o ativo subjacente se comporte olhando para o futuro.

Ao ser utilizado dessa forma invertida, o Black & Scholes deixa de ser um modelo descritivo do mercado e passa a atuar como um instrumento de leitura das expectativas implícitas dos agentes, revelando, nos próprios preços das opções, as inconsistências entre suas hipóteses e a realidade observada.

3.2 Sorriso (smile) e skew de volatilidade

Contrariando a hipótese de volatilidade constante, a volatilidade implícita observada no mercado varia com o preço de exercício (strike) e o tempo até o vencimento. Esse fenômeno, conhecido como smile ou skew de volatilidade, evidencia que opções fora do dinheiro ou muito próximas do dinheiro apresentam volatilidades diferentes, refletindo expectativas de risco não capturadas pelo modelo original.

Podemos ver isso calculando as volatilidades implícitas, mas também conseguimos olhar a série histórica de retornos realizados do ativo subjacente, e olhar como o histograma dos retornos se afasta da distribuição normal. Nessa distribuição realizada é possível medir a assimetria da distribuição, e veremos que esses números se afastam do valor esperado em uma distribuição normal.

Um ponto particularmente interessante surge quando a assimetria dos retornos realizados difere daquela implícita nos preços das opções em um determinado momento do tempo. Caso um trader acredite que essa discrepância reflete uma precificação incorreta do risco, torna-se possível estruturar estratégias com opções para explorar essa divergência entre a visão do mercado e a expectativa do investidor. Por essa razão, traders de volatilidade monitoram atentamente esses deslocamentos entre volatilidade implícita e dinâmica realizada, em busca de oportunidades de captura de valor.

A existência persistente de smiles e skews de volatilidade é uma evidência direta de que o mercado não precifica risco de forma homogênea, rejeitando simultaneamente as hipóteses de volatilidade constante e de retornos normalmente distribuídos implícitas no modelo clássico.

3.3 Eventos de cauda (crises, gaps, circuit breakers):

O mercado financeiro está sujeito a eventos extremos, como crises econômicas, falhas técnicas e interrupções temporárias de negociação (circuit breakers) que provocam quedas ou saltos abruptos nos preços dos ativos. Esses eventos de cauda não são capturados pela hipótese de difusão contínua do modelo de Black & Scholes, o que limita sua capacidade de modelar e precificar adequadamente os riscos associados a tais ocorrências. Ao observar os histogramas de retorno do ativo subjacente, nota-se a presença de caudas significativamente mais pesadas do que aquelas previstas por uma distribuição normal. Nesse contexto, abre-se espaço para estratégias de arbitragem de volatilidade nas extremidades da distribuição, em que traders comprem ou vendem opções deep out-of-the-money buscando explorar a diferença entre a volatilidade implícita precificada pelo mercado e a volatilidade que esperam realizar.

Um elemento central para entender esse comportamento é a aversão ao risco dos investidores. Os investidores em geral sofrem muito mais quando acontece queda no valor dos seus investimentos do que têm de felicidade com um ganho da mesma magnitude. Por conta desse efeito, os investidores acabam pagando um prêmio para que seus investimentos tenham perdas limitadas, mas não pagariam o mesmo prêmio para um ganho aumentado em uma alta. Temos aqui então um desequilíbrio entre o valor de prêmio para proteção, resultando então em um aumento do preço das opções de venda com strikes baixos (naturalmente onde se encontram as caudas de baixa). Quer dizer, ao mesmo tempo que vemos crashes nas bolsas, empresas que têm eventos negativos e uma queda acentuada no preço de suas ações, os investidores por outro lado têm receio desses efeitos bem conhecidos, e acabam pagando prêmios altos por essas proteções, causando uma elevação na volatilidade implícita das opções com strikes muito baixos.

Nesse contexto, um trader, que não tenha um viés de aversão ao risco como o investidor comum, poderia se aproveitar e vender essas opções com prêmio elevado, acima do esperado, para realizar lucro no médio e longo prazo. Mas aqui mora um perigo escondido, naturalmente, uma vez que aconteça um evento de cauda desses, o prejuízo causado ao portfólio do vendedor dessas opções pode ser grande. Cabe aqui um controle de risco rigoroso para que os prejuízos, quando acontecerem, estejam dentro de um limite razoável.

Eventos de cauda expõem de maneira clara o limite estrutural do modelo de Black & Scholes: quando os riscos mais relevantes são justamente os extremos, um modelo que os trata como praticamente impossíveis inevitavelmente subestima o verdadeiro custo da proteção.

3.4 Volatilidade “em clusters”:

A volatilidade do mercado tende a se agrupar em períodos prolongados de alta ou baixa intensidade, fenômeno conhecido como cluster de volatilidade. Em geral, esses regimes de alta volatilidade surgem após a ocorrência de eventos de cauda, sejam eles de natureza sistêmica, como crises financeiras, ou idiossincrática, como eventos específicos a um ativo ou setor.

Após um choque dessa natureza, observa-se um aumento praticamente imediato da volatilidade implícita em toda a superfície de opções. A estrutura a termo da volatilidade sofre um deslocamento para cima, com elevações mais pronunciadas nos vencimentos mais curtos e efeitos mais moderados nos prazos mais longos. Além disso, o aumento da volatilidade tende a ser mais intenso no lado do movimento recente do ativo subjacente: em episódios de queda, por exemplo, opções de venda com strikes mais baixos passam a embutir volatilidades significativamente maiores do que opções de compra com strikes mais altos, refletindo a assimetria do risco percebido pelo mercado.

Esse ajuste inicial ocorre de forma quase instantânea, à medida que os preços das opções incorporam o novo nível de incerteza, porém os efeitos do choque não se dissipam com a mesma velocidade. A volatilidade realizada nos dias subsequentes tende a permanecer elevada, indicando que o mercado atravessa um período prolongado de maior instabilidade. Embora, ao longo do tempo, a volatilidade apresente um comportamento de reversão à média, esse processo é gradual, fazendo com que episódios de alta volatilidade se organizem em clusters temporais.

Do ponto de vista econômico, essa persistência está associada à incerteza residual deixada pelo evento inicial, à reavaliação contínua dos riscos por parte dos agentes e à demanda sustentada por instrumentos de proteção. Essa característica temporal da volatilidade contradiz diretamente a hipótese de volatilidade constante do modelo de Black & Scholes e evidencia que a incerteza do mercado não é homogênea ao longo do tempo, afetando de forma relevante a precisão das previsões e estratégias baseadas no modelo clássico.

Esse comportamento é amplamente documentado na literatura empírica e motivou o desenvolvimento de modelos de volatilidade condicional e volatilidade estocástica, nos quais a própria incerteza passa a ter dinâmica própria.

Uma vez reconhecidas essas evidências empíricas, torna-se natural questionar se é possível construir modelos que preservem a elegância matemática do modelo de Black & Scholes, mas que incorporem de forma explícita essas características observadas no mercado.

4. Consequências práticas das limitações do modelo

Em função das limitações do modelo de Black & Scholes, diversos matemáticos e financistas tentam criar uma fórmula ou no mínimo modelar a volatilidade como uma variável aleatória, governada por seu próprio processo estocástico. Modelos de volatilidade estocástica, como o de Heston, surgem exatamente para reconciliar a teoria com a evidência empírica observada na superfície de volatilidade implícita. Na prática, Black & Scholes continua sendo a ferramenta que o mercado utiliza para estimar a volatilidade implícita, calibrar os precificadores de opções e nortear o mercado. Esses modelos de volatilidade estocástica entram para tentar gerar uma precificação mais consistente, que leva em consideração muitas dessas características que falamos nesse artigo. Também é utilizado para estimar risco de portfólios expostos a prejuízos nas caudas de retorno e com portfólios com alta exposição em vega e assimetria de volatilidade implícita.

A principal limitação do Black & Scholes não está na fórmula em si, mas na rigidez de suas hipóteses. Uma vez que a volatilidade observada no mercado apresenta dinâmica própria, torna-se natural modelá-la como um processo estocástico, sujeito a choques, persistência e reversão à média. Abaixo temos um modelo que tenta acomodar essas evidências empíricas:

Modelo de Heston (1993)

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S \\ dv_t = \kappa (\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^V \end{cases}$$

Fórmula 2: Modelo de Heston

Onde

S_t é o preço no instante t ,

dS_t é o diferencial de preço no instante t ,

μ é o drift (constante),

v_t é a variância, agora um processo estocástico ($\sqrt{v_t}$ é a volatilidade no instante t),

dW_t^S é o processo de Wiener com relação ao preço no instante t ,

dW_t^V é o processo de Wiener com relação à variância no instante t ,

dW_t^S e dW_t^V tem correlação ρ

θ é a variância no longo prazo, conforme t tende ao infinito, v_t tende a θ

κ é a velocidade de reversão à média da variância,

ξ é a volatilidade da volatilidade, que determina a variância de v_t

Apesar da notação mais carregada, a intuição econômica do modelo é bastante clara:

A volatilidade:

- Varia ao longo do tempo
- Reverte para uma média de longo prazo (θ)

A volatilidade da volatilidade (ξ) controla quão errática ela é

A correlação (ρ) entre os Brownianos gera:

- Skew negativo em ações
- Smile em FX

5. Experiências de mercado

Eventos extremos fornecem alguns dos exemplos mais claros das limitações práticas do modelo de Black & Scholes. Durante períodos de estresse agudo, as hipóteses de volatilidade constante, difusão contínua e distribuição lognormal dos preços tornam-se particularmente frágeis, expondo riscos que não são capturados pelo arcabouço clássico.

Um caso emblemático ocorreu durante a crise do COVID-19, em abril de 2020, quando o contrato futuro de petróleo WTI chegou a ser negociado a preços negativos. Esse episódio não apenas representou um evento de cauda extremo, como também violou de forma explícita uma das premissas centrais do modelo: a lognormalidade do preço do ativo subjacente, que, por construção, impede preços negativos. Naquele contexto, a combinação de colapso na demanda, limitações de armazenamento e dinâmica específica do mercado futuro levou a um comportamento de preços que estava completamente fora do espaço de possibilidades do modelo de Black & Scholes.

Do ponto de vista da precificação de opções, episódios como esse evidenciam o risco de se utilizar modelos baseados em hipóteses excessivamente restritivas. Volatilidades implícitas dispararam, a superfície de volatilidade sofreu deslocamentos abruptos e estratégias de hedge contínuo mostraram-se insuficientes diante de movimentos descontínuos e assimétricos. Modelos calibrados em regimes “normais” falharam em antecipar a magnitude e a natureza dos riscos observados.

Na prática, traders e gestores de risco experientes precisaram, em muitos casos, abandonar completamente o uso do modelo de Black & Scholes. Afinal, um modelo baseado em preços lognormalmente distribuídos é incapaz, por construção, de precificar opções cujo ativo subjacente pode assumir valores negativos. Diante desse cenário, alguns participantes recorreram ao modelo de Bachelier, que não impõe a restrição de positividade dos preços, enquanto outros optaram por reduzir exposições ou utilizar modelos alternativos mais adequados ao novo regime de mercado. Mais do que uma anomalia isolada, o episódio do petróleo negociado a preços negativos ilustra como, em situações extremas, o

mercado pode transitar para regimes nos quais a intuição econômica e as condições de mercado se sobrepõem às suposições matemáticas clássicas.

Essas experiências de mercado reforçam a ideia central deste artigo: o modelo de Black & Scholes é elegante e extremamente útil, mas sua aplicação prática exige consciência crítica de suas hipóteses. Em ambientes de estresse, são justamente essas hipóteses que deixam de ser válidas, tornando indispensável uma abordagem mais flexível e adaptativa para a gestão de risco e a precificação de derivativos.

Conclusão

O modelo Black & Scholes permanece uma ferramenta fundamental e elegante para a precificação de opções, graças à sua formulação matemática clara e aplicabilidade prática. No entanto, suas hipóteses simplificadoras limitam sua capacidade de descrever completamente o comportamento do mercado real, que é marcado por volatilidade variável, eventos extremos e fricções. Para lidar com essas limitações, é essencial complementar o modelo com ajustes práticos, como a utilização da superfície de volatilidade implícita, e integrar outras abordagens que considerem a complexidade do mercado. A análise crítica e a adaptação contínua são, portanto, indispensáveis para o uso eficaz de modelos financeiros em ambientes reais e dinâmicos.

Compreender essas limitações não diminui a importância do Black & Scholes, ao contrário, permite utilizá-lo de forma mais consciente, crítica e eficaz em um mercado que está longe de ser estático ou perfeitamente normal.

KTH Group
Janeiro de 2026