Artigo 03:

Gregas e expansão de Taylor: desmontando a opção em pedaços de risco

Série KTH | Volatilidade, Probabilidade e Precificação

Gregas e expansão de Taylor: desmontando a opção em pedaços de risco

Por Raphael Shiratori

KTH – Tecnologia para gestão de portfólio, risco e compliance

Conteúdo produzido no contexto das pesquisas e experiências práticas da KTH no desenvolvimento de soluções para mercados financeiros.

Introdução

No universo das opções financeiras, as gregas são ferramentas centrais para a análise, compreensão e gestão de risco. Elas quantificam como o preço de uma opção reage a pequenas variações em variáveis fundamentais do mercado, como o preço do ativo subjacente, a volatilidade implícita, o tempo e a taxa de juros.

Uma forma elegante e conceitualmente poderosa de entender as gregas é enxergá-las como os termos de uma expansão de Taylor aplicada à função de precificação da opção e, mais importante ainda, ao seu P&L (*Profit and Loss*). Essa abordagem permite decompor variações potencialmente complexas e não lineares em componentes mensuráveis, cada um associado a um tipo específico de risco.

O objetivo deste artigo é organizar as gregas dentro da estrutura da expansão de Taylor, mostrando como elas surgem naturalmente da matemática da precificação e por que são tão úteis, na prática, para *traders* e gestores de risco.

Começamos revisando a expansão de Taylor, em seguida conectamos cada termo às gregas tradicionais e, por fim, mostramos como essa decomposição explica o P&L em cenários reais de mercado.

1. Explicação simplificada da expansão de Taylor:

A expansão de Taylor é uma ferramenta matemática que permite aproximar uma função não linear por meio de uma soma de termos lineares e polinomiais, construídos a partir das derivadas da função avaliadas em torno de um ponto específico.

De forma intuitiva, considere uma função genérica não linear: $f(x, y, z, \dots)$

A expansão de Taylor nos permite escrever essa função como uma combinação das derivadas de primeira, segunda, terceira ordem (e assim por diante), todas avaliadas em um ponto inicial, que chamaremos de ponto de referência ou ponto de expansão.

1.1. Expansão em uma variável

Para uma única variável x, a expansão de Taylor em torno do ponto a é dada por:

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 s + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3 + \cdots$$

Fórmula 1: expansão de Taylor

Onde:

- $f(a)$ é o valor da função no ponto inicial (ordem zero), podemos pensar que é a condição inicial do mercado;
- os termos seguintes $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ representam as contribuições das derivadas de ordem crescente;
- $(x-a)$ é a distância em relação ao ponto inicial, podemos pensar em um choque a partir do ponto inicial

1.2. Expansão em múltiplas variáveis

Quando a função depende de várias variáveis, como $f(x, y)$, a lógica é a mesma, mas passamos a incluir derivadas parciais e derivadas cruzadas:

$$f(x,y) \sim f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 + \cdots$$

Fórmula 2: Expansão de Taylor para duas variáveis

Onde:

- $f(a,b)$ é o valor da função nos pontos iniciais (a e b). Também podemos pensar que é a condição inicial do mercado;
- $(x-a)$, $(\mathrm{y}-b)$ são as distâncias em relação ao ponto inicial, também podemos pensar nos choques partindo do ponto inicial de cada variável

Aqui utilizamos derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, da função bivariada em relação à cada uma de suas variáveis (e as de segunda ordem e cruzadas)

Esse processo pode ser estendido para n variáveis, o que é exatamente o caso das funções de precificação de opções.

1.3. Ordem da expansão e interpretação prática

Um ponto fundamental da expansão de Taylor é o papel da ordem:

- termos de primeira ordem dependem linearmente do choque;
- termos de segunda ordem capturam efeitos de convexidade;
- termos de ordem superior capturam efeitos cada vez mais sutis, e que se materializam com choques cada vez maiores

O denominador fatorial cresce rapidamente, fazendo com que, para choques pequenos, os termos de ordem elevada tenham contribuição desprezível. Por outro lado, quando nos afastamos significativamente do ponto inicial, grandes movimentos de mercado, os termos de ordem superior passam a ganhar relevância.

Essa observação será crucial para entender por que Delta domina o P&L em dias tranquilos, enquanto Gamma e Vega se tornam centrais em períodos de estresse.

2. Aplicação da expansão de Taylor ao modelo de Black–Scholes

Considere agora a função de precificação de uma opção de compra europeia no modelo de Black–Scholes. O preço da opção pode ser escrito como:

$$C(S, \sigma, t, r) = S\,N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Fórmula 3: Black and Sholes

O preço da opção é, portanto, uma função não linear de múltiplas variáveis:

- S: preço do ativo subjacente;
- σ: volatilidade implícita;
- t: tempo até o vencimento;
- r: taxa de juros.

Como qualquer função diferençável, essa função pode ser expandida em série de Taylor em torno de um ponto específico do mercado. Ao fazermos isso, obtemos uma aproximação do preço e, mais importante, da variação do preço em termos das derivadas parciais dessa função.

Essas derivadas parciais também são conhecidas como *gregas,* embora nem todas sejam letras gregas de fato, apenas imitando a sonoridade das letras gregas.

3. Gregas principais como termos da expansão de Taylor

A expansão de Taylor do preço da opção revela naturalmente um conjunto de sensibilidades dominantes. Essas sensibilidades receberam nomes próprios porque representam os principais canais de risco:

- **Delta (Δ)**: primeira derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo subjacente.
- **Gamma (Γ)**: segunda derivada em relação ao preço do ativo; mede a convexidade da opção.
- **Vega**: derivada do preço da opção em relação à volatilidade implícita.
- **Theta (Θ)**: derivada do preço da opção em relação ao tempo.
- **Rho (ρ)**: derivada do preço da opção em relação à taxa de juros.

Além dessas, existem gregas de ordem superior e gregas cruzadas, como:

- **Vomma**: sensibilidade do Vega à volatilidade;
- **Vanna**: sensibilidade do Delta à volatilidade.

Em princípio, qualquer derivada da função de precificação pode ser usada como um termo adicional da expansão. Na prática, o uso é limitado pelo compromisso entre precisão e complexidade operacional.

Um ponto importante, diretamente ligado às propriedades da expansão de Taylor, é que as gregas de primeira ordem tendem a dominar o comportamento do P&L para movimentos pequenos. As gregas de segunda ordem tornam-se relevantes à medida que nos afastamos do ponto inicial, isto é, quando ocorrem choques mais significativos no mercado.

4. Interpretação econômica das gregas

A partir desse ponto, a leitura das gregas deixa de ser puramente matemática e passa a ser econômica.

4.1. Delta:

Representa a exposição direcional ao ativo subjacente. Um Delta positivo implica ganho em altas do ativo; um Delta negativo implica ganho em quedas. O Delta é a grega mais operada no mercado financeiro, e usualmente utilizado para indicar operação onde está sendo trabalhado apenas a região linear do portfólio. Geralmente é a grega mais simples de se fazer o hedge, pois instrumentos lineares são os mais líquidos e com menor fricção para serem operados.

4.2. Gamma:

Mede o risco de não linearidade: um Gamma elevado significa que o Delta muda rapidamente, tornando a posição mais sensível a movimentos bruscos do mercado. Gamma mede o risco de não linearidade. Um Gamma elevado implica que o Delta muda rapidamente, tornando a posição mais sensível a movimentos bruscos do mercado.

Gamma trading refere-se à necessidade de ajustar continuamente o hedge de Delta à medida que o preço do ativo se move. Quanto maior o Gamma, maior será a frequência e a intensidade desses ajustes.

Esse efeito é particularmente relevante em posições short Gamma, nas quais, mesmo após o Delta hedge, o prejuízo cresce com a magnitude do choque do ativo subjacente.

Essa grega aqui é de profunda importância quando estamos lidando com portfólios altamente não linear, potencialmente mostrando sua exposição à choques. Como os instrumentos de hedge costumam ser lineares, se torna complexo diminuir sua exposição à convexidade da posição, tornando-se vital realizar o Delta hedge da posição, em especial com posições "*short Gamma*", ou seja, posições que, mesmo Delta *hedged*, aumentam seu prejuízo com a magnitude do choque do ativo subjacente.

4.3. Vega

Captura a exposição à volatilidade implícita. Mudanças na percepção de risco do mercado podem gerar impactos relevantes no preço da opção, mesmo sem variações significativas no ativo subjacente. Essa grega também é de elevada importância. Aqui a relação do tempo é fundamental. Quando mais longo o prazo da opção, maior tende a ser o impacto da volatilidade implícita resultado do seu portfólio, enquanto o efeito do Gamma tende a ser relativamente menor. Gamma e Vega são as gregas onde se concentram os principais efeitos não lineares das opções sobre o portfólio, especialmente em cenários de choque de mercado.

4.4. Theta

Representa o custo do tempo: a perda (ou ganho) de valor associada à passagem do tempo, mantendo as demais variáveis constantes. O Theta está diretamente relacionado à diferença entre o valor intrínseco e o valor extrínseco da opção. O preço da opção pode ser decomposto em valor intrínseco, associado ao *payoff*, e valor extrínseco, que representa o prêmio pago pela não linearidade e pelo tempo até o vencimento. Como no vencimento o valor extrínseco converge a zero, o Theta mede exatamente a velocidade desse decaimento ao longo do tempo. Então temos que em um momento da vida da opção, o valor extrínseco com o passar do tempo irá convergir para zero, e o Theta é a medida que mostra esse decaimento.

Em termos práticos, o Theta pode ser interpretado como o prêmio diário pago para carregar a não linearidade da opção, permitindo ao operador explorar Gamma e monetizar a volatilidade realizada.

4.5. Rho

Mede a sensibilidade à taxa de juros, sendo mais relevante para opções de prazo mais longo. É a componente de juros no tempo. Em geral, não é uma variável que apresenta grande sensibilidade, acabando por ter relevância limitada na análise do risco da maioria das opções.

5. Expansão de Taylor aplicada ao P&L da opção

Aplicando a expansão de Taylor diretamente à variação do preço da opção, obtemos uma aproximação para o P&L:

$$dP \sim \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + Vega\ d\sigma + \theta dt + \rho dr + \cdots$$

onde:

- dP é o P&L para o período avaliado
- dS representa a variação do preço do ativo subjacente;
- $d\sigma$ a variação da volatilidade implícita;
- dt representa a passagem do tempo;
- dr é a variação da taxa de juros.

Cada termo da expansão corresponde à contribuição de uma grega específica para o resultado (P&L). A aproximação é válida para pequenas variações e pode perder precisão em cenários de movimentos extremos, saltos ou mudanças estruturais de regime de mercado.

Abaixo mostramos o efeito dessas gregas sobre o Preço da opção (e naturalmente ao P&L dela):

5.1. Decomposição visual do Delta e do Gamma:

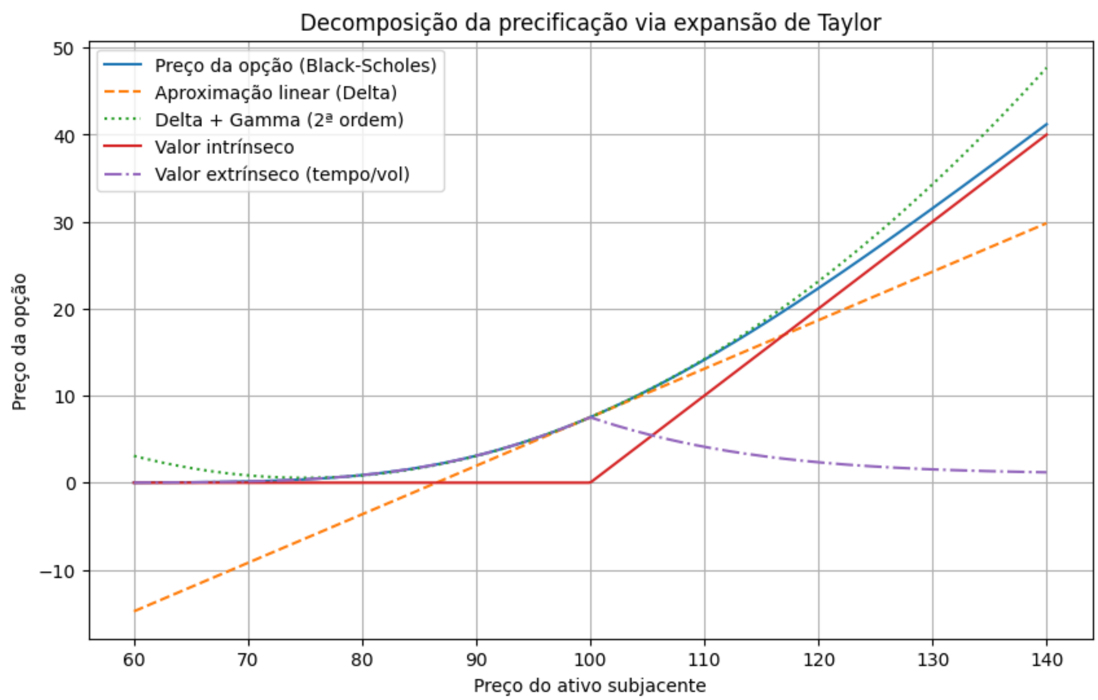

Gráfico 1 Aproximação do preço da opção pelo Delta e Gamma

Esse gráfico ilustra de forma clara a diferença entre aproximações lineares e o preço teórico. Considerando o preço da opção representado pela linha azul, observa-se que a aproximação utilizando apenas o Delta (linha amarela tracejada) é adequada apenas para choques de pequena magnitude. Para choques de maior magnitude, a aproximação linear passa a divergir rapidamente do preço real da opção. Perceba que o ponto inicial (a) nesse caso é 100. Quando o choque é de 10 pontos (90 ou 110 o valor de x), a aproximação apenas com a linha amarela tracejada já perde consistência. Aí entramos no efeito do Gamma. Perceba que o efeito do Delta somada ao efeito do Gamma (linha pontilhada verde) ainda mantém uma aproximação do preço da opção muito consistente, com esse choque de 10 pontos, ainda estamos muito próximos do valor da opção, mostrando a consistência da aproximação. Para choques maiores (por exemplo 30 pontos de choque, levando para um nível de 70 ou 130), o efeito da aproximação já começa a ficar menos consistente. Nesse ponto, tornam-se relevantes os termos de ordem superior da expansão, associados às derivadas de terceira ordem em diante.

5.2. Decomposição visual do Vega:

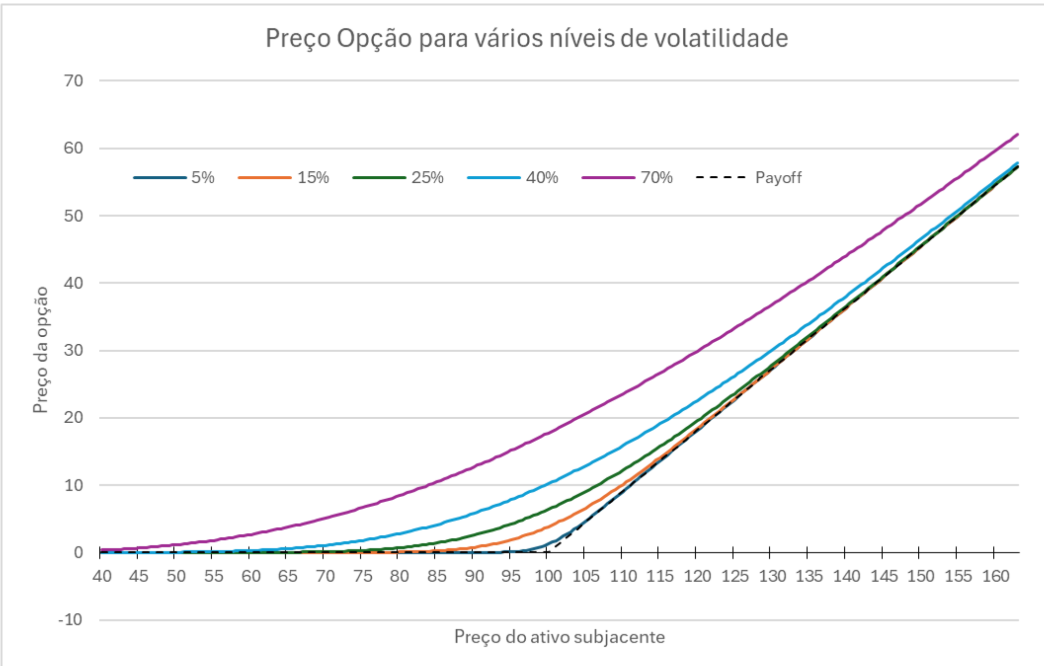

Gráfico 2: Efeito Vega para uma opção

Esse gráfico ilustra o impacto isolado da variação da volatilidade implícita sobre o preço da opção. Vemos claramente que com aumento da volatilidade temos um aumento do preço da opção. O Vega permite quantificar diretamente o potencial de aumento ou diminuição do preço da opção e, por consequência, do P&L da estratégia, em resposta a mudanças na volatilidade implícita.

6. Aplicação prática na gestão de P&L

Na prática, *traders* e gestores utilizam as gregas para monitorar e ajustar continuamente suas carteiras:

- Delta é ajustado para controlar a exposição direcional;
- Gamma é monitorado para entender riscos de movimentos não lineares;
- Vega é essencial para gerenciar a exposição à volatilidade;
- Theta orienta decisões de carregamento de posições ao longo do tempo.

Um exemplo recorrente ocorre quando o P&L diário de uma carteira não pode ser explicado apenas pelo Delta. Nesses casos, a decomposição via Taylor frequentemente revela que Gamma e Vega foram os principais responsáveis pelo resultado, indicando que convexidade e mudanças de volatilidade dominaram o comportamento da carteira.

Essa leitura permite ajustes mais precisos e uma gestão de risco mais consciente e estruturada.

7. Aplicação de Taylor quando mais importa: eventos disruptivos

Considere o seguinte exemplo prático. Suponha que um *trader* compre 10.000 opções de compra (*calls*) de USDBRL na B3 (cada contrato possui nocional de 50.000 dólares), com vencimento em 1 mês e strike em **5,50**. No momento da negociação, o câmbio à vista está em **5,34** e a volatilidade implícita da opção é de **23%** ao ano.

Utilizando o modelo de Black–Scholes, podemos calcular diretamente o prêmio dessa opção. Para fins ilustrativos, suponha que o preço da opção seja de **R$ 0,092** por contrato. A pergunta relevante, do ponto de vista de gestão de risco, não é apenas quanto a opção vale hoje, mas qual é o risco embutido em carregá-la no portfólio.

Para responder a isso, fazemos a decomposição do preço da opção em suas principais gregas, focando naquelas com maior impacto no P&L em cenários realistas de mercado:

- Delta: exposição direcional ao USDBRL:
    - Nessa operação temos **38%** de Delta. Como o nocional da operação é de **USD 500 milhões**, o Delta em financeiro é de **USD 191 milhões**. Isso significa que, para uma variação de 1% no USDBRL, o impacto financeiro associado ao Delta da opção será de aproximadamente **USD 1,91 milhões**.
- Gamma: convexidade da posição em relação ao preço à vista;
    - Nessa operação temos um Gamma de **1.06,** e medido enquanto o Delta financeiro em USD altera com o aumento de 1% do ativo subjacente, esse Gamma em financeiro é de **28.3MM USD / 1%**.
- Vega: exposição à volatilidade implícita do USDBRL.
    - Nessa operação temos um Vega de **59%**, o Vega em financeiro é de **2.9MM** BRL (medido enquanto altera o valor da posição com **1%** de aumento na volatilidade implícita do ativo subjacente)

Agora, suponha um evento disruptivo, no qual ocorre um choque relevante no preço do ativo subjacente, acompanhado de uma reprecificação da volatilidade implícita, algo bastante comum em mercados de risco, onde spot e volatilidade são claramente correlacionados. Esse ponto é consistente com a modelagem conjunta dos processos estocásticos de preço e volatilidade, discutida no segundo artigo desta série.

Assumamos, então, um conjunto de choques simultâneos no spot e na volatilidade implícita e utilizemos a expansão de Taylor para estimar o impacto no P&L da posição, decompondo o resultado por grega:

Cenários	**+4**	**+3**	**+2**	**+1**	**-1**	**-2**
Choque Spot	7.00%	5.00%	2.00%	1.00%	(1.00%)	(3.00%)
Choque Vol	10.00%	3.00%	1.00%	0.00%	0.00%	(1.00%)
Spot	5.7138	5.607	5.4468	5.3934	5.2866	5.1798
Delta Value MM BRL	71.43	51.02	20.41	10.20	(10.20)	(30.61)
Gamma Value MM BRL	37.07	18.91	3.03	0.76	0.76	6.81
Vega Value MM BRL	29.53	8.86	2.95	0.00	0.00	(2.95)
Taylor Value MM BRL	138.03	78.79	26.39	10.96	(9.45)	(26.76)
BS Value MM BRL	136.48	79.71	26.83	11.06	(9.53)	(26.50)
Erro BRL MM BRL	1.55	(0.91)	(0.44)	(0.10)	0.08	(0.26)
Erro %	1.14%	(1.15%)	(1.64%)	(0.91%)	(0.83%)	0.97%

Tabela 1. Cenários de choque para posição de opção de USDBRL

Esses dados representam o P&L aproximado localmente, utilizando apenas derivadas de primeira e segunda ordem, comparado com a reprecificação da opção usando a modelagem tradicional (reprecificando as opções).

Observamos que, mesmo em um cenário de choque relevante, o P&L estimado pela expansão de Taylor se aproxima bastante do valor obtido pela reprecificação completa no modelo. As diferenças observadas podem ser explicadas principalmente por derivadas de ordem superior e termos cruzados, que não foram incluídos explicitamente na aproximação. Para choques ainda maiores que o apresentado, começamos a apresentar um erro maior de aproximação do resultado.

Um ponto particularmente interessante surge quando analisamos a possibilidade de *hedgear* essa posição. Na prática, o hedge mais líquido e operacionalmente simples seria feito com futuros ou NDFs (*non deliverable forwards*) de USDBRL. Esses instrumentos têm uma característica fundamental: seu payoff é linear no preço do ativo subjacente.

Se aplicarmos a mesma lógica da expansão de Taylor a esses instrumentos lineares, todas as derivadas de segunda ordem e superiores são nulas. Em outras palavras, eles permitem hedge apenas da componente de Delta da opção, daí o termo Delta hedge. **Ao realizar esse hedge, eliminamos a exposição direcional, mas permanecemos expostos a Gamma e Vega**, como evidenciado abaixo:

Cenários	**+4**	**+3**	**+2**	**+1**	**-1**	**-2**
Choque Spot	7.00%	5.00%	2.00%	1.00%	(1.00%)	(3.00%)
Choque Vol	10.00%	3.00%	1.00%	0.00%	0.00%	(1.00%)
Spot	5.7138	5.607	5.4468	5.3934	5.2866	5.1798
Delta Value MM BRL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Gamma Value MM BRL	37.07	18.91	3.03	0.76	0.76	6.81
Vega Value MM BRL	29.53	8.86	2.95	0.00	0.00	(2.95)
Taylor Value MM BRL	66.60	27.77	5.98	0.76	0.76	3.86
BS Value MM BRL	65.05	28.69	6.42	0.86	0.68	4.11
Erro BRL MM BRL	1.55	(0.91)	(0.44)	(0.10)	0.08	(0.26)

Tabela 2. Cenários de choque para posição de opção com Delta hedge de USDBRL

Esse resultado deixa claro que, mesmo após o hedge, o portfólio continua vulnerável a movimentos não lineares do ativo e a mudanças na volatilidade implícita. Fica claro que ao gerenciar um portfólio com opções, mesmo estando neutro em Delta, movimentos extremos podem causar impactos relevantes no resultado. Por isso é importante estar sempre ciente dos riscos em termos de Gamma e Vega (não somente em Delta), especialmente quando se está vendido. Fica claro especialmente quando olhamos o resultado do portfólio, em que percebemos que choques instantâneos no ativo subjacente podem gerar prejuízos relevantes, tanto em movimentos de alta quanto de queda.

Por fim, vale destacar um aspecto empírico crucial. Se os retornos do ativo subjacente fossem normalmente distribuídos, a probabilidade de eventos de quatro desvios-padrão ou mais seria extremamente baixa, algo como uma vez a cada muitos milhares de dias. No entanto, na prática, esse tipo de evento ocorreu diversas vezes nas últimas décadas, uma frequência ordens de magnitude maior do que a normalidade sugeriria.

Nesses episódios extremos, a contribuição do Gamma para o P&L torna-se dominante, como evidenciado na tabela acima. Isso ilustra de forma concreta como ineficiências de mercado, caudas pesadas e descontinuidades fazem com que os termos não lineares da expansão de Taylor deixem de ser correções marginais e passem a ser o principal motor do resultado da carteira.

Conclusão

A expansão de Taylor fornece um arcabouço matemático claro e intuitivo para compreender o risco embutido em posições com opções. As gregas surgem naturalmente como os coeficientes dessa expansão, cada uma representando a exposição a um fator específico do mercado.

Ao decompor o P&L em termos gerenciáveis, essa abordagem permite que *traders* e gestores antecipem comportamentos, identifiquem fontes de risco e tomem decisões mais informadas. A combinação entre gregas e expansão de Taylor constitui, portanto, uma das bases conceituais mais sólidas da gestão moderna de risco em derivativos financeiros.

KTH Group
Janeiro de 2026